УДК 510.57 **DOI** 10.17150/2500-2759.2017.27(4).585-593

ПОЛУРЕШЕТКИ РОДЖЕРСА КЛАССОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Ф. И. Иванов, Ю. Д. Корольков
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
15 июня 2017 г.

Дата принятия к печати
20 ноября 2017 г.

Дата онлайн-размещения
27 ноября 2017 г.

Ключевые слова

Полурешетки Роджерса; теория вычислимости; вычислимые множества; вычислимые нумерации; морфизмы

Аннотация

В настоящее время полурешетки Роджерса являются одним из основных инструментов для моделирования сложности вычислимых объектов в теории вычислимости. Их применяют не только в классической теории, но и в отношении объектов, определяемых в иерархиях Клини — Мостовского или Ершова. В статье рассматриваются полурешетки Роджерса, полученные на основе монотонных вычислимых нумераций классов бесконечных вычислимых множеств. Результаты исследования относятся к базовой теории, заложенной трудами А. Н. Колмогорова, А. И. Мальцева и Ю. Л. Ершова. Вводятся понятия монотонной нумерации и монотонного идеала полурешетки Роджерса, показывается, что для задач оценки сложности на выделенных классах объектов ограничения монотонными структурами не приводят к существенному уменьшению качества оценок. В работе доказываются теоремы об изоморфизме и эпиморфизмах монотонных идеалов полурешеток Роджерса для широкого спектра классов бесконечных вычислимых множеств. В качестве следствий этих теорем получены структурные оценки полурешеток Роджерса, аналогичные стандартным оценкам в литературе.

ROGERS SEMILATTICES OF CLASSES OF INFINITE COMPUTABLE SETS

Fedor I. Ivanov, Yuri D. Korolkov
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

Article info

Received
June 15, 2017

Accepted
November 20, 2017

Available online
November 27, 2017

Keywords

Rogers semilattice; computability theory; computable sets; computable numberings; morphisms

Abstract

Currently, Rogers semilattices are one of the main tools for modeling the complexity of computable objects in computability theory. They are used not only in the classical theory, but also for objects defined in the Klini — Mostovskii or Ershov hierarchies. Rogers semilattices obtained on the basis of monotone computable numberings of classes of infinite computable sets are considered in the article. The results of the article relate to the basic theory laid down by the works of A. N. Kolmogorov, A. I. Maltsev and Yu. L. Ershova. The concepts of monotone numbering and the monotone ideal of the Rogers semilattice are introduced. It is shown that for problems of estimating complexity on selected classes of objects, constraints by monotone structures do not lead to a significant decrease in the quality of estimates. We prove theorems on isomorphism and epimorphisms of monotone ideals of Rogers semilattices for a wide class of classes of infinite computable sets. As a consequence of these theorems, structural estimates of Rogers semilattices are obtained, analogous to standard estimates in the literature.

Впервые нумерации в качестве математических объектов появились в статье А. Н. Колмогорова [1], а его ученик В. А. Успенский в это же время начал исследования вычислимых нумераций классов вычислимо перечислимых множеств и частично вычислимых функций.

Впоследствии теория вычислимых нумераций развивалась Ю. Л. Ершовым [2; 3], А. Х. Лахланом, А. Б. Хуторецким,

Известия Байкальского государственного университета. 2017. Т. 27, № 4. С. 585–593

ISSN 2500-2759

С. С. Марченковым [4], В. В. Вьюгиным, С. С. Гончаровым [5], С. А. Бадаевым [6], В. Л. Селивановым, М. Куммером [7; 8], А. Сорби [9], С. Ю. Подзоровым [10], С. С. Оспичевым [11] и др.

Получено значительное количество результатов по вычислимым нумерациям в разностной иерархии Ершова и арифметической иерархии Клини — Мостовского.

В работе С. С. Гончарова и А. Сорби [9] введено новое определение вычислимого семейства формульных объектов в тех языках, в которых можно описать для формул языка геделевскую нумерацию. Этот подход для иерархий Ершова и Клини — Мостовского дает определение вычислимых классов множеств и тем самым вводит полурешетки Роджерса. Так, вычислимость нумерации α семейства множеств из класса K задается определимостью в его терминах универсального множества этой нумерации $\{< x, n > | \, x \in \alpha(n)\}$.

При рассмотрении классов вычислимо перечислимых множеств ($K = \Sigma^0_1$) с традиционным заданием вычислимой нумерации [3] универсальное множество будет представлять собой равномерный алгоритм, вычисляющий попадание элемента во множество $\alpha(n)$, как и у С. С. Гончарова и А. Сорби.

В случае если $K = \Sigma^0_{n+1}$, то из вычислимости нумерации α следует, что ее универсальное множество будет $0^{(n)}$, т. е. вычислимо перечислимым, это вытекает из сильной теоремы о иерархии [12]. Таким образом, основная часть известных результатов классической теории нумерации будет верна для объектов арифметической иерархии.

Если $K = \sum^{-1}_n$, то на каждом шаге перечисления $\alpha(n)$ каждый x может попасть в $\alpha(n)$. В классической рекурсивной теории этот x не может быть выведен из $\alpha(n)$ на следующих шагах, но здесь такое разрешено. Количество переходов x в $\alpha(n)$ и из него ограничено значением числа n.

Выделим две важные задачи современных исследований, связанных с минимальными нумерациями:

1. Определение характеристик семейства $A \in \Sigma^i_n$, при которых оно имеет минимальные Σ^i_n-вычислимые нумерации.

2. Нахождение числа минимальных элементов для полурешетки Роджерса любого семейства множеств.

Первой важной теоремой о минимальных нумерациях стала теорема Р. М. Фридберга о построении для класса всех вычислимо перечислимых (рекурсивно перечислимых) множеств однозначной нумерации [13]. Затем М. Пур-Эль и Г. Путнам [14] с помощью креативного множества K описали класс вычислимо перечислимых множеств, не имеющий вычислимых однозначных нумераций, теперь такие нумерации называются фридберговыми:

$$\{\{2x, 2x+1\} \mid x \in K\} \cup \{\{2x\}, \{2x+1\} \mid x \notin K\}.$$

Заметим, что во второй главе монографии «Алгоритмические свойства вычислимых нумераций» [11] в качестве следствия одного результата С. С. Оспичева доказано, что этот класс обладает Σ^{-1}_3-вычислимой фридберговой нумерацией.

Из первоначальных результатов можно также вспомнить необходимые условия существования вычислимых однозначных нумераций, полученные А. Лахланом, и работы А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, М. Куммера, содержащие достаточные условия для классов вычислимо перечислимых множеств.

В настоящей работе будут исследоваться вычислимые классы бесконечных вычислимых множеств. Известно, что любое бесконечное вычислимое множество перечисляется некоторой строго монотонной вычислимой функцией [15]. В связи с этим удобно будет рассматривать не любые вычислимые нумерации подобных классов, а только монотонные, в которых каждое множество перечисляется строго монотонно.

Элементы полурешетки Роджерса, порожденные монотонными вычислимыми нумерациями, образуют подполурешетку полурешетки Роджерса и ее идеал. Действительно, если нумерация сводится к монотонной нумерации, то она сама монотонна, сумма двух монотонных нумераций тоже монотонна. Монотонные нумерации являются негативными, поэтому все минимальные элементы монотонного идеала порождаются однозначными нумерациями [2]. Далее рассматриваются только такие классы, у которых монотонный идеал (далее — МИ) полурешетки Роджерса непустой, будем называть их монотонно вычислимыми классами.

Совпадает этот идеал со всей полурешеткой Роджерса для вычислимых классов бесконечных вычислимых множеств или нет, на данный момент не важно. Необходимо показать высокую сложность полурешетки Роджерса, для этого достаточно установить сложность ее монотонного идеала.

В работе с использованием эффективных операторов [12; 16] получены результаты исследования морфизмов МИ полурешеток Роджерса монотонно вычислимых классов бесконечных вычислимых множеств. В монографии «Дискретные модели: представление конечными деревьями и разрешимость

Bulletin of Baikal State University, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 585–593

формальных теорий» [16] показано, что если существует эффективный обратимый оператор из одного вычислимого класса в другой, то будет существовать и эффективный гомеоморфизм этих классов в бэровской топологии. Эффективный же гомеоморфизм классов влечет изоморфизм их полурешеток Роджерса. Аналогичные результаты верны для эпиморфизмов и изоморфных вложений вычислимых классов.

Далее будут доказаны основные теоремы об изоморфизмах МИ полурешеток Роджерса. Предполагается, что все классы бесконечные, поскольку полурешетка Роджерса конечного класса бесконечных вычислимых множеств одноэлементна.

Теорема 1. Если A и B яявляются монотонно вычислимыми классами бесконечных вычислимых множеств без изолированных точек, то монотонный идеал полурешетки Роджерса $L^0(A)$ изоморфен монотонному идеалу полурешетки Роджерса $L^0(B)$.

Доказательство. Возьмем π: $N \to A$ и ν: $N \to B$ — произвольные вычислимые однозначные нумерации классов. Необходимо определить два множества некоторых начальных отрезков бесконечных множеств классов A и B соответственно через построение их однозначных сильно вычислимых нумераций θ и ξ, и вычислимую перестановку f множества N, обладающих следующими свойствами:

$$\forall\, in\ \exists\ uv\ (\pi_i^n \subseteq \theta u \subseteq \pi i\ \&\ \nu_i^n \subseteq \xi v \subseteq \nu i),$$
$$\forall\, in\, (\theta i \subseteq \pi n \Leftrightarrow \xi i \subseteq \nu f(n)),$$
$$\forall\, in\, (\theta i \subseteq \theta n \Leftrightarrow \xi i \subseteq \xi n).$$

При этих условиях нумерации θ и ξ дают полное однозначное представление некоторого эффективного обратимого оператора Φ: $A \to B$, откуда и будет вытекать изоморфизм $L^0(A)$ и $L^0(B)$. Функция f представляет оператор Φ в нумерациях π и ν, т. е. $\Phi(\pi i) = \nu f(i)$, $i \in N$. Упорядоченные системы $< \theta N, \subseteq >$ и $< \xi N, \subseteq >$ изоморфны, задают хаусдорфовы топологии на A и B. Соответственно, оператор Φ определяет эффективный гомеоморфизм этих классов как топологических пространств. Эти подходы разработаны в монографии Ю. Д. Королькова и В. И. Мартьянова [там же].

Теперь приступим к определению нумераций θ, ξ и функции f «по шагам». На шаге s строятся конечные отрезки θs и ξs, они в дальнейшем не меняются, $\theta 0 = \xi 0 = \emptyset$. Обозначим через $|\theta s|$ длину θs как начального отрезка бесконечного вычислимого множества, а через δf^s (ρf^s) — область определения (область значений) начального отрезка функции f, определенного к шагу s. Кроме того, в конструкции присутствуют функции h_1 и h_2:

$$h_1(s, u) = \max\{\, i \mid i \le s\ \&\ \theta i \subseteq \pi u\},$$
$$h_2(s, u) = \max\{\, i \mid i \le s\ \&\ \xi i \subseteq \nu u\}.$$

Они вычислимы, так как предикаты $\theta i \subseteq \pi u$ и $\xi i \subseteq \nu u$ вычислимы. Последнее утверждение следует из сильной вычислимости нумераций θ и ξ, вычислимости нумераций π и ν и того факта, что θi и ξi — начальные отрезки множеств πu и νu. Более того, для любых чисел s и u множества $\{i \mid h_1(s, i) = h_1(s, u)\}$ и $\{i \mid h_2(s, i) = h_2(s, u)\}$ бесконечны, так как A и B не содержат изолированных точек, а значения функций $h_1(s, i)$ и $h_2(s, i)$ обусловлены соотношениями начальных отрезков множеств πi и νi соответственно.

Будем контролировать верность следующих трех утверждений на каждом шаге s конструкции:

1. $\forall\ i, j \le s\ (\theta i \subseteq \theta j \Leftrightarrow \xi i \subseteq \xi j)$.
2. $\forall\ i \le s\ \exists\ vw\ (h_1(s, v) = h_2(s, w) = i)$.
3. $\forall\ i \le s\ \forall\ v \in \delta f^s\ (\theta i \subseteq \pi v \Leftrightarrow \xi i \subseteq \nu f(v))$.

Так как классы A и B не содержат изолированных точек, существование чисел v, w в утверждении 2 предполагает наличие бесконечного количества таких чисел.

Переходим к описанию конструкции.

Шаг 0. Задаем начальные значения $\delta f^0 = \rho f^0 = \theta 0 = \xi 0 = \emptyset$. Правильность утверждений 1–3 видна непосредственно.

Шаг s + 1. Случай 1, когда $r(s) = 0$. Если $l(s)$ четно, то определяем $k = \mu t\ (t \notin \delta f^s)$, $u = \mu t\, (t \notin \rho f^s\, \&\, h_1(s, k) = h_2(s, t))$. Если $l(s)$ нечетно, то $u = \mu t\, (t \notin \rho f^s)$, $k = \mu t\, (t \notin \delta f^s\, \&\, h_1(s, t) = h_2(s, u))$. Существование чисел k и u следует из утверждений 1–3. Последовательно определяем:

$$f(k) = u,\ \delta f^{s+1} = \delta f^s \cup \{k\},\ \rho f^{s+1} = \rho f^s \cup \{u\},$$
$$p = \mu t\, (t \ne k\ \&\ h_1(s, t) = h_1(s, k)),$$
$$n = \mu t\left(t > |\theta s|\ \&\ \pi_k^t \ne \pi_p^t\ \&\ (\forall\, i \in \delta f^s\, (\pi_i^t \ne \pi_k^t))\right),$$
$$q = \mu t\ (t \ne u\ \&\ h_2(s) = h_2(s, u)),$$
$$m = \mu t\, (t > |\xi s|\ \&\ \nu_u^t \ne \nu_q^t\ \&\ (\forall\, i \in \rho f^s\, (\nu_i^t \ne \nu_u^t))),$$
$$\theta(s + 1) = \pi_k^n, \quad \xi(s + 1) = \nu_u^m.$$

Выбор чисел k и u гарантирует, что функция f является перестановкой N и f представляет эффективный оператор Φ. Все время, когда число k не лежало в области определения функции f, а число u — в области ее значений, θs и ξs определялись независимо от вычислений πk и νu. Условие же $h_1(s, k) = h_2(s, u)$ гарантирует точность положения πk и νu относительно множеств конечных деревьев $\{\theta 0, \dots, \theta s\}$ и $\{\xi 0, \dots, \xi s\}$ соответственно. Впоследствии при определении новых θi и ξi нужно

ISSN 2500-2759

смотреть, чтобы сохранялось расположение πk и νu относительно тех же множеств начальных отрезков. Сначала вычисляется настолько большой начальный отрезок $\theta(s+1)$ длины n множества πk, чтобы на этом уровне n все множества с номерами из области определения δf^{s+1} уже различались. Таким образом, то единственное число $t \in \delta f^{s+1}$, что $h_1(s+1, t) = s+1$, равно числу k. Точно так же находится число m для u. Кроме того, нужно выполнить утверждение 2, с этой целью определяются числа p и q.

На шагах 0 и $s+1$ со случаем 2 достигается полнота представления θ и ξ.

Случай 2, когда $r(s) > 0$. На одном из предыдущих шагов $d = c(l(s), 0) + 1$, $d < s+1$, были вычислены k и u такие, при которых $f(k) = u$, $k \in \delta f^d \setminus \delta f^{d-1}$. Зафиксируем k и u и далее последовательно определяем:

$$\delta f^{s+1} = \delta f^s, \quad \rho f^{s+1} = \rho f^s,$$
$$p = \mu t\ (t \neq k\ \&\ h_1(s, t) = h_1(s, k)),$$
$$n = \mu t\ (t > |\theta s|\ \&\ \pi_k^t \neq \pi_p^t),$$
$$q = \mu t\ (t \neq u\ \&\ h_2(s, t) = h_2(s, u)),$$
$$m = \mu t\ (t > |\xi s|\ \&\ \nu_u^t \neq \nu_q^t),$$
$$\theta(s+1) = \pi_k^n, \quad \xi(s+1) = \nu_u^m.$$

Для проверки истинности утверждения 1 заметим, что для любых $i \le s$ верно $\theta i \subseteq \theta(s+1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \theta i \subseteq \pi k \Leftrightarrow \xi i \subseteq \nu u \Leftrightarrow \xi i \subseteq \xi(s+1)$. Здесь первая и третья эквивалентности верны, поскольку $|\theta(s+1)| > |\theta i|$ и $|\xi(s+1)| > |\xi i|$. Справедливость утверждения 1 на предыдущем шаге доказывает вторую эквивалентность: $\theta i \subseteq \pi k \Leftrightarrow \theta i \subseteq \theta\, h_1(s, k) \Leftrightarrow \xi i \subseteq \xi\, h_2(s, u) \Leftrightarrow \xi i \subseteq \nu u$, так как $h_1(s, k) = h_2(s, u) \le s$.

Для проверки правильности утверждения 2 выделим сначала равенства

$$h_1(s+1, k) = h_2(s+1, u) = s+1,$$
$$h_1(s+1, p) = h_1(s, p) = h_1(s, k) = h_2(s, u) = h_2(s, q) = = h_2(s+1, q).$$

Другие числа из множества $\{0, 1, \dots, s\}$ удовлетворяют необходимым условиям по индуктивному предположению. Проверяем:

$$\forall\ v\ (h_1(s, u) \neq h_1(s, k) \Rightarrow h_1(s+1, v) = h_1(s, v)),$$
$$h_2(s, v) \neq h_2(s, u) \Rightarrow h_2(s+1, v) = h_2(s, v).$$

Допустим, что $h_1(s+1, v) \neq h_1(s, v)$, тогда $h_1(s+1, v) = s+1 = h_1(s+1, k)$, поэтому $h_1(s, v) = = h_1(s, k)$.

Для проверки утверждения 3 достаточно убедиться, что для всех v из δf^{s+1} выполняется $\theta(s+1) \subseteq \pi v \Leftrightarrow \xi(s+1) \subseteq \nu f(v)$.

Из определения k и u следует, что $\theta(s+1) \subseteq \pi k$ и $\xi(s+1) \subseteq \nu f(k)$. Если же $v \in \delta f^{s+1}$ и $v \neq k$, то πv не может включать $\theta(s+1)$, а $\nu f(v)$ — $\xi(s+1)$, тогда выполнялись бы равенства $h_1(s+1, v) = h_1(s+1, k)$ или $h_2(s+1, f(v)) = h_2(s+1, f(k))$. Невозможность подобных равенств достигается на шагах, где имеет место случай 1.

Проверим выполнение свойств нумераций множеств начальных отрезков θ и ξ, которые были обозначены в самом начале при построении изоморфизма. Первое свойство справедливо, так как на шагах со случаем 2 бесконечно много начальных отрезков каждого множества класса $A(B)$ попадает в нумерацию θ (соответственно, и в нумерацию ξ). Утверждения 2 и 3 были доказаны в процессе индуктивной реализации конструкции во времени.

Пусть через L обозначен МИ полурешетки Роджерса одного из монотонно вычислимых классов бесконечных вычислимых множеств без изолированных точек.

Следствие 1. $L \cdot L \approx L$.

Доказательство. Возьмем произвольный монотонно вычислимый класс бесконечных вычислимых множеств без изолированных точек A и определим $A_1 = \{2g \mid g \in A\}$, $A_2 = \{2g+1 \mid g \in A\}$. Ясно, что A_1 и A_2 — два класса бесконечных вычислимых множеств без изолированных точек, их объединение дает нам точно такой же третий класс. По теореме 1 полурешетки Роджерса всех трех классов изоморфны, но, как отметил Ю. Л. Ершов, $L^0(A_1 \cup A_2) \approx L^0(A_1) \cdot L^0(A_2)$ при условии, что A_1 и A_2 являются эффективно отделимыми [2]. Это соотношение доказывает следствие. В случае любого другого числа сомножителей доказательство следствия остается неизменным.

Следствие 2. Для произвольных двух минимальных элементов a и b из полурешетки L найдется автоморфизм ω: $L \to L$ такой, что $\omega a = b$.

Доказательство. Пусть $\pi \in a$, $\nu \in b$ — однозначные нумерации. Если доказательство теоремы 1 провести с этими нумерациями, то оператор Φ на выходе будет индуцировать искомый автоморфизм ω: $\Phi(\pi) = \nu f \in b$, т. е. $\omega a = b$.

Теорема 2. Если A — вычислимый класс бесконечных вычислимых множеств без изолированных точек, а B — произвольный вычислимый класс бесконечных вычислимых множеств, то существует эпиморфизм полурешеток ω: $L^0(A) \to L^0(B)$.

Доказательство. Определим операторы Φ: $A \to B$ и Ψ: $B \to A_1 \subseteq A$ такие, что выполняется $\Phi\Psi(b) = b$ при $b \in B$, кроме того, оператор Ψ должен быть изоморфизмом. Таким образом, каждый вычислимый класс B есть

Bulletin of Baikal State University, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 585–593

ретракт вычислимого класса без изолированных точек [3]. Более точно, если нумерация $\pi \in H^0(A)$ то $< B, \Phi(\pi) >$ является ретрактом $< A, \pi >$, и также если нумерация $\nu \in H^0(B)$, то найдется такая нумерация $\pi \in H^0(A)$, что $< B, \nu >$ станет ретрактом $< A, \pi >$.

Пусть даны $\pi: N \to A$ и $\nu: N \to B$ — вычислимые однозначные нумерации. Будем определять по шагам сильно вычислимые нумерации θ и ξ подмножеств начальных отрезков множеств классов A и B соответственно. Эти нумерации предназначаются для задания эффективного оператора Φ: $A \to B$, который решит поставленную в теореме проблему. Дополнительно зададим вычислимые функции f и g. Нумерации θ, ξ и функции f, g должны удовлетворять следующим пяти свойствам:

1. $\forall\, ik\, (\alpha i \subseteq \alpha k \Rightarrow \beta g(i) \subseteq \beta g(k))$.
2. $\forall\, ik\, (\alpha i \subseteq \varepsilon k \Rightarrow \beta g(i) \subseteq \tau f(k))$.
3. $\forall\, is\, \exists\, uv\, (\varepsilon_i^s \subseteq \alpha u \subseteq \varepsilon i \;\&\; \tau_i^s \subseteq \beta v \subseteq \tau i)$.
4. $\rho f = \rho g = N$.
5. $\forall\, ik\, \forall\, j \in g^{-1}(i)\, \exists\, l \in g^{-1}(k)\, (\beta g(i) \subseteq \beta g(k) \Rightarrow \Rightarrow \alpha j \subseteq \alpha l)$.

Свойства 1 и 4 обеспечивают искомый эпиморфизм $< \theta N, \subseteq >$ на $< \xi N, \subseteq >$, который на номерах дублируется вычислимой функцией g, свойства 2 и 5 гарантируют ретракцию Φ — Ψ, свойство 3 задает полноту определяемых операторов.

Конструкция будет описываться «по шагам». Обозначим через $|\theta s|$ длину θs как начального отрезка бесконечного вычислимого множества, а δf^s (ρf^s) будут областью определения (областью значений) начального отрезка f, вычисленного к шагу s. В процессе построения операторов также участвуют вычислимые функции h_1 и h_2: $h_1(s, u) = \max\{i \mid i \in \delta g^s \;\&\; \theta i \subseteq \pi v\}$, $h_2(s, u) = \max\{i \mid i \in \rho g^s \;\&\; \xi i \subseteq \nu u\}$.

Заметим, что для любых s и k множества $\{i \mid h_1(s, i) = h_1(s, k)\}$ содержат бесконечно много элементов, так как класс A включает только предельные элементы.

Следующие три утверждения будут индуктивно проверяться на каждом шаге s конструкции:

1. $\forall\, i, j \in \delta g^s\, (\theta i \subseteq \theta j \Rightarrow \xi g(i) \subseteq \xi g(j))$.
2. $\forall\, i \in \delta g^s\, (\exists\, w \notin \delta f^s\, (h_1(s, w) = i) \;\&\; (i \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow \exists\, v \in \delta f^s\, (h_1(s, v) = i)))$.
3. $\forall\, v \in \delta f^s\, \forall\, i \in \delta g^s\, (\theta i \subseteq \pi v \Rightarrow \xi g(i) \subseteq \nu f(v))$.

Переходим к описанию конструкции.

Шаг 0. Пусть $n = \mu t(\pi_0^t \neq \pi_1^t)$. Полагаем, что $\theta_0 = \xi_0 = \emptyset$, $\theta_1 = \pi_0^n$, $\xi_1 = \nu_0^0$, $f(0) = g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Справедливость утверждений 1–3 вполне очевидна.

Шаг $s + 1$. Случай 1, когда $r(s + 1) = 0$. Если $l(s + 1)$ является четным числом, то задаем k как $\mu t\, (t \notin \delta f^s)$. Далее, число x равно нулю, если $h_1(s, k) = 0$, в противном случае полагаем $x = \mu t\, (t \in \delta f^s \;\&\; h_1(s, t) = h_1(s, k))$ и $u = f(x)$. Существование x следует из утверждения 2.

Если $l(s + 1)$ нечетно, то задаем $u = \mu t\, (t \notin \rho f^s)$, $k = \mu t\, (t \notin \delta f^s \;\&\; gh_1(s, t) = h_2(s, u))$.

Далее последовательно определяем:

$$f(k) = u,$$
$$p = \mu t\, (t \neq k \;\&\; h_1(s, t) = h_1(s, k)),$$
$$n = \mu t\, \big(t > |\alpha s| \;\&\; \varepsilon_k^t \neq \varepsilon_p^t \;\&\; (\forall\, i \in \delta f^s\, (\varepsilon_i^t \neq \varepsilon_k^t))\big),$$
$$m = \mu t\, \big(t > |\beta s| \;\&\; (\forall\, i \in \rho f^s\, (i \neq u \Rightarrow \tau_i^t \neq \tau_u^t))\big).$$

Если a (b) — минимальные числа, не принадлежащие δf^s (ρf^s) соответственно, то определяем $\theta a = \pi_k^n$, $\xi b = \nu_u^m$. Затем переходим к случаю 3.

Случай 2, когда $r(s + 1) > 0$. На одном из предыдущих шагов в случае 1 $d = c(l(s + 1), 0)$, $d < (s + 1)$ было вычислено некоторое число u. Пусть $f^{-1}(u) = \{k_0, \ldots, k_e\}$, числа a и b как указано выше. Последовательно определяем:

$$p_i = \mu t\, (t \notin \delta f^s \;\&\; h_1(s, t) = h_1(s, k_i)) \quad i \leq e,$$
$$n = \mu t\, \big(t > |\alpha(a - 1)| \;\&\; \forall\, i \leq e\, (\varepsilon_{k_i}^t \neq \varepsilon_{p_i}^t)\big),$$
$$m = \mu t\, (t > |\beta(b - 1)|), \quad \beta b = \tau_u^m,$$
$$\alpha(a + i) = \varepsilon_{k_i}^{n+i}, \quad g(a + i) = b, \quad i \leq e.$$

Переходим к случаю 3.

Случай 3. При $h_2(s, u) = 0$ нужно перейти к очередному шагу. В противоположной ситуации обозначим $g^{-1}h(s, u) = \{c_0, \ldots, c_e\}$. Возьмем $d_0, \ldots, d_e$ такие числа, что $f(d_j)$ определены, $h_1(s, d_j) = c_j$, $j \leq e$. Такие числа существуют по утверждению 2. Для всякого числа d_j, $j \leq e$, при котором $f(d_j) \neq u$, найдем минимальные числа v, w, на которых еще не определена функция f, но выполнено $h_1(s, v) = h_1(s, w) = h_1(s, d_j)$. После этого определяем:

$$n = \mu t\, \big(t > |\theta c_j| \;\&\; \pi_v^t \neq \pi_w^t \;\&\; (\forall\, i \in \delta f^{s+1}\, (\pi_i^t \neq \pi_v^t))\big),$$
$$\theta a_j = \pi_v^n, \quad f(v) = u, \quad g(a_j) = b,$$

где a_j — минимальное число, на котором еще не определена функция g. Число b задается как $b = h_2(s + 1, u)$, что обеспечивает выполнение свойства 5. Конструкция описана.

Для проверки правильности утверждения 1 достаточно показать, что если θj задано на одном из более ранних шагов, а $\theta(a + i)$ задано на шаге $s + 1$, то $\theta(j) \subseteq \theta(a + i) \Rightarrow \xi g(j) \subseteq \xi g(a + i)$. Далее, $\theta(a + i) \subseteq \pi k_i$, $\xi g(a + i) \subseteq \nu u$, $|\theta(a + i)| > |\theta j|$, $|\xi g(a + i)| > |\xi g(j)|$ согласно построению и ввиду выбора k_i, u, и поэтому $\theta j \subseteq \pi k_i \Rightarrow \xi g(j) \subseteq \nu u$.

Правильность утверждения 2 обеспечивает выбор чисел p_i и условие $\theta(a + i) = \pi_{ki}^n \neq \neq \pi_{pi}^n$, $i \leq e$.

Утверждение 3 проверяем только для отрезков, созданных на шаге $s+1$: $\theta(a+i)$ и $\xi g(a+i)$. Этого достаточно. Заметим, что отрезок $\theta(a+i)$ входит только в одно множество с π-номером из δf^s, $\theta(a+i) \subseteq \pi k_i$, $i \le e$. Кроме того, $u = f(k_i)$ и $\xi g(a+i) \subseteq \nu u$ согласно описанию конструкции.

Из правильности свойств 1 и 2 для нумераций θ и ξ вытекают ограниченные утверждения 1 и 3. Наличие других свойств легко понять по построению.

Теперь задаем отображение φ: $H^0(A) \to$ $\to H^0(B)$. Пусть γ: $N \to A$ — вычислимая нумерация, тогда для $i \in N$ определяем $\varphi(\gamma)(t) =$ $= \cup\{\xi g(t)\}$, здесь t может принимать свои значения только из множества $\{t \mid \theta t \subseteq \gamma i\}$. Эффективность отношения $\theta t \subseteq \gamma i$ и свойство 1 обеспечивают вычислимость нумерации $\varphi(\gamma)$, а свойства 2–4 гарантируют, что $\varphi(\gamma)$ и есть вычислимая нумерация класса B. Далее, если $i \in N$ и $\gamma i = \pi n$ при каком-то n, то $\varphi(\gamma)(i) = \nu f(n)$. Отсюда следует, что если γ_1, $\gamma_2 \in H^0(A)$ и $\gamma_1 = \gamma_2 e$ для какой-то вычислимой функции e, то $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_2)e$.

Докажем, что если $\eta \in H^0(B)$ и η — цилиндрическая нумерация [3, 15], то найдется $\gamma \in H^0(A)$ и $\varphi(\gamma) = \eta$. Так как во всяком классе эквивалентных нумераций имеется цилиндрическая нумерация, то нумерационное отображение φ индуцирует необходимый эпиморфизм полурешеток $L^0(A)$ на $L^0(B)$. Поэтому принимаем, что для всяких i, j, k из N выполнено $\eta c(i, j) = \eta c(i, k)$. Будем пошагово определять необходимую нумерацию γ с применением функций из предыдущего построения.

Шаг 0, если $\gamma_i^0 = \emptyset$ при всех $i \in N$.

Шаг $s+1$. Случай 1, когда для всех u из ρf^{s+1} нарушается равенство $\max\{i \mid i \in \rho g^{s+1} \mathbin{\&} \xi i \subseteq \eta c(l(s),0)\} = h_2(s+1, u)$. Из этого следует в том числе, что номер множества $\eta c(l(s),0)$ в нумерации ν не попал в ρf^{s+1}. Для любой функции такой вариант может возникнуть только на конечном числе шагов. Перейдем на следующий шаг.

Случай 2, если не выполняется случай 1, а для функции $\eta c(l(s),0)$ в первый раз неверны его условия, выберем однозначно u. Пусть $g^{-1}h_2(s+1, u) = \{c_0, \dots, c_e\}$. Полагаем, что $\gamma^{s+1}c(l(s), j) = \theta c_j$, $j \le e$. Существуют единственные $k_0, \dots, k_e$ из δf^{s+1} такие, при которых $h_1(s+1, k_j) = c_j$, $j \le e$, причем $f_{s+1}^{-1}(u) = \{k_0, \dots, k_e\}$. Поэтому, если на начальных отрезках из $\xi(\rho g^{s+1})$ функция $\eta c(l(s),0)$ совпадает с функцией $\nu u(\eta c(l(s),0) =_{s+1} \nu u)$, то продолжаем функции $\gamma c(l(s),i)$, $i \ge 0$ начальными отрезками θn, $n \in \delta g^{s+1}$ функций πk_j, $k_j \in f_{s+1}^{-1}(u)$.

Случай 3, когда $\eta c(l(s),0) =_{s+1} \nu u$ для некоторого u, и на предыдущем шаге $a+1$ выполнялось $\eta c(l(s), 0) =_{d+1} \nu u$ с условием $l(d) = l(s)$.

Задаем $\gamma^{s+1}c(l(s), j+i) = \theta h_1(s+1, di)$, $i \le e$; функции $\gamma^s c(l(s), i)$, где $i < j$, строились как ограничение некоторых функций πk_i на множестве $\{\theta m \mid m \in \delta g^{d+1}\}$. Доопределяем $\gamma^{s+1}c(l(s), i)$, $i < j$, до тех же πk_i, которые теперь лежат во множестве $\{\theta m \mid m \in \delta g^{s+1}\}$. Если же $f_{s+1}^{-1}(u) = f_{d+1}^{-1}(u)$, то полагаем $\gamma c(l(s), j) = \gamma c(l(s), 0)$.

Случай 4, когда $\nu u =_{d+1} \eta c(l(s), 0) =_{s+1} \nu y$ и $y \ne u$. Понятно, что $\nu u =_{d+1} \nu y$. Пусть $\gamma^s c(l(s), i) = \theta a_i \subseteq \pi k_i$, $k_i \in f^{-1}(u)$, $i < j$. По свойству 5 существуют такие n_i, $i < j$, при которых $f(n_i) = y$, $\theta i \subseteq \pi n_i$.

Введем функцию $\lambda y f_1(y) = \mu t\,(f(t) = y)$, вычислимую в силу условия $f(N) = N$, и положим $A_1 = \pi f_1(N)$. Первым элементом представления оператора Φ берем ξ, а вторым элементом — ограничение θ на классе A_1. Теорема доказана.

Доказанные теоремы дают некоторое представление о строении полурешетки L. Известно, что она не является решеткой [4], имеет бесконечное количество минимальных элементов, которые порождены несравнимыми однозначными нумерациями [2], а также не имеет максимальных элементов. Постараемся получить новые результаты в отношении строения полурешетки L.

Определение. Возьмем $A_0, \dots, A_n$ — попарно не пересекающиеся бесконечные вычислимые множества, в объединении дающие весь натуральный ряд N. Пусть вычислимые функции $g_0, \dots, g_n$ перечисляют $A_0, \dots, A_n$ без повторений, а $\theta_0, \dots, \theta_n$ — нумерации некоторого семейства A. Через $\theta_0 + \dots + \theta_n$ обозначаем такую нумерацию семейства A, что $(\theta_0 + \dots + \theta_n)\, g_k(i) = \theta_k i$, где $i \in N$, $0 \le k \le n$.

Элемент полурешетки $L^0(A)$, содержащий $\theta_0 + \dots + \theta_n$, есть точная верхняя грань элементов $L^0(A)$, содержащих $\theta_0, \dots, \theta_n$ соответственно, это легко проверяется.

Предложение. Для каждого $n \in N$ и произвольного минимального элемента a_0 полурешетки L найдутся такие попарно различные и отличные от a_0 минимальные элементы $a_1, \dots, a_n$, что если c — минимальный элемент в L и $c \le a_0 + \dots + a_n$, то c равен одному из a_k, $0 \le k \le n$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $n > 0$, пусть θ_0 — однозначная нумерация из a_0. Возьмем M — произвольное максимальное множество [15], для него существует вычислимая функция g, перечисляющая вычислимо перечислимое бесконечное

Bulletin of Baikal State University, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 585–593

множество M без повторений. Вычислимые однозначные нумерации θ_k, $1 \le k \le n$ станем определять по шагам так, чтобы на каждом шаге проверялись утверждения 1–3:

1. Если $i \in N \setminus M$, тогда $\theta_k i = \theta_0 i$ при условии, что $1 \le k \le n$.

2. Если $i \in M$, тогда среди $\theta_0 i, \ldots, \theta_n i$ нет равных.

3. Все $\theta_0 g, \ldots, \theta_n g$ как однозначные нумерации семейства $\theta_0 M$ должны быть попарно изоморфными.

В то же время строятся частично вычислимые функции $f_1, \ldots, f_n$, такие, в которых $\delta f_k = \rho f_k = M$. Кроме того, если $x, y \in M$ и $x \ne y$, то $f_k(x) \ne f_k(y)$, $\theta_k i = \theta_0 f_k(i)$, $1 \le k \le n$, $i \in M$. Проследим, чтобы на любом шаге s и для произвольных $i \in N$, $k \le n$, если выполнено $i \in \delta f_k^s$, тогда $(\theta_k i)^s = (\theta_0 f_k(i))^s$, в противном случае $(\theta_k i)^s = (\theta_0 i)^s$.

Для обеспечения правильности утверждения 2 нужно все время следить за тем, чтобы $i \in M \Rightarrow i, f_1(i), \ldots, f_m(i)$ были попарно различны. Зададим функцию $\lambda i f_0(i) = i$.

Шаг (–1). Все объекты пустые.

Далее все шаги будут нумероваться парами чисел $\{< s, k > \mid s \in N,\ 1 \le k \le n\}$, упорядоченными лексикографически.

Шаг $< s, k >$. Случай 1, если $g(s) \in \delta f_k^{s-1}$. Полагаем $\delta f_k^s = \rho f_k^s = \rho f_k^{s-1}$ и переходим к очередному шагу.

Случай 2, при котором $g(s) \notin \delta f_k^{s-1}$. Задаем $m = \mu t\,(\forall\, p < k\ (t \ne f_p(g(s)))\ \&\ t \notin \delta f_k^{s-1}\ \&\ t \in M\ \&\ (\theta_0 t)^{s-1} = (\theta_0 g(s))^{s-1})$. Такое m всегда найдется: во-первых, множество $R = \{t \mid (\theta_0 t)^{s-1} = (\theta_0 g(s))^{s-1}\}$ является вычислимым и бесконечным, так как класс вычислимых множеств не содержит изолированных точек; во-вторых, поскольку M — максимальное множество, то $M \cap R$ — бесконечное вычислимо перечислимое множество, эффективно определяемое по s; в-третьих, неравенств для проверки t имеется конечное число.

Задаем $f_k g(s) = m$, $f_k(m) = g(s)$, $\delta f_k^s = \rho f_k^s = \rho f_k^{s-1} \cup \{g(s), m\}$. Переходим к очередному шагу. Определение конструкции завершено.

Докажем некоторые необходимые утверждения:

1. Пусть $k \ne u$, $0 \le k$, $u \le n$, тогда нумерация θk не является изоморфной нумерации θu.

Доказательство от противного. Предположим, что существует h — вычислимая перестановка множества N и $\theta_k = \theta_u h$. Множество $T = \{x \mid h(x) = x\}$ является вычислимым, но по утверждениям 1 и 2 оно будет равно множеству $N \setminus M$, которое не является вычислимым, т. е. возникает противоречие.

2. Предположим, что γ — однозначная нумерация класса и $\gamma = (\theta_0 + \ldots + \theta_n)h$ для какой-то вычислимой функции h. Тогда γ будет изоморфной некоторой θ_k, $0 \le k \le n$.

Выберем $A_0, \ldots, A_n$; $g_0, \ldots, g_n$ так же, как это было сделано в определении перед этим предложением, в этом случае $P_k = h^{-1}(A_k)$ — вычислимые, попарно не пересекающиеся и в объединении равные N множества. Задаем $B = \{i \mid \exists\, j \in N \setminus M(\gamma i = \theta_0 j)\}$. Докажем, что B включено в одно из P_k, $0 \le k \le n$, за исключением, быть может, конечного числа своих элементов. Предположим противное: пусть при каких-то i, j, $i \ne j$ множества $B \cap P_i$ и $B \cap P_j$ бесконечны. Однако тогда бесконечны и множества $h(B \cap P_i)$ и $h(B \cap P_j)$. Функции g_i^{-1} и g_j^{-1} определены на A_i и A_j соответственно и они разнозначные. Из всего этого следует, что множества $g_i^{-1} h(P_i)$ и $g_j^{-1} h(P_j)$ являются вычислимо перечислимыми и при этом имеют бесконечные пересечения с множеством $N \setminus M$, что противоречит свойству максимальности.

Доказано, что множество B включено почти все в какое-то множество P_k, $0 \le k \le n$. Покажем, что $\gamma = \alpha_k h_1$, здесь сводящая функция задана двумя равенствами: $h_1(x) == \{g_k^{-1}(h(x))$, если $x \in P_k$; $f_k^{-1} f_j g_j^{-1} h(x)$, если $x \in P_j$, $j \ne k\}$.

Определение корректно: если $x \in P_j$, $j \ne k$, то $x \notin B$ и $h(x) \in A_j$, поэтому значение $g_j^{-1}(h(x))$ может быть вычислено, и оно укажет номер функции γx в нумерации α_j, при этом $g_j^{-1}(h(x) \in M$. Поскольку $\alpha_j f_j(y)$ и $\alpha_0 z$ лежат в $\alpha_k f_k^{-1}(z)$, при условии, что y и z находятся в M, то $\gamma x = \alpha_k h_1(x)$. Исключение в последнем равенстве может составить разве что конечное множество чисел $x \in B \setminus P_k$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. К определению алгоритма / А. Н. Колмогоров, В. А. Успенский // Успехи математических наук. — 1958. — Т. 13, № 4 (82). — С. 3–28.

2. Ершов Ю. Л. Нумерации семейств общерекурсивных функций / Ю. Л. Ершов // Сибирский математический журнал. — 1967. — Т. 8, № 5. — С. 1015–1025.

3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. — М. : Наука, 1977. — 416 с.

4. Марченков С. С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций / С. С. Марченков // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 5. — С. 588–607.

5. Гончаров С. С. Однозначные вычислимые нумерации / С. С Гончаров // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 1. — С. 23–44.

ISSN 2500-2759

6. Бадаев С. А. О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств / С. А. Бадаев, С. С. Гончаров // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 5. — С. 507–522.

7. Kummer M. Numberings of $R_1 \cup F$ / M. Kummer // Computer Science Logic 1988 / ed. by E. Börger, H. Kleine, M. M. Richter // Lecture Notes in Computer Science 385. — Berlin : Springer Verlag, 1989. — P. 166–186.

8. Kummer M. Some applications of computable one-one numberings / M. Kummer // Archive for Mathematical Logic. — 1990. — Vol. 30, № 4. — P. 219–230.

9. Гончаров С. С. Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса / С. С. Гончаров, А. Сорби // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 6. — С. 621–641.

10. Подзоров С. Ю. Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций / С. Ю. Подзоров // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42, № 2. — С. 211–226.

11. Корольков Ю. Д. Алгоритмические свойства вычислимых нумераций / Ю. Д. Корольков, С. С. Оспичев. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. — 106 с.

12. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Х. Роджерс. — М. : Мир, 1972. — 624 с.

13. Friedberg R. M. Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication / R. M. Friedberg // Journal of Symbolic Logic. — 1958. — Vol. 23. — P. 309–316.

14. Pour-El M. B. Recursively enumerable classes and their applications to sequences of formal theories / M. B. Pour-El, H. Putnam // Archiv für Mathematische. Logik und Grundlagenforschung. — 1965. — Vol. 8. — P. 104–121.

15. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1965. — 392 с.

16. Корольков Ю. Д. Дискретные модели: представление конечными деревьями и разрешимость формальных теорий / Ю. Д. Корольков, В. И. Мартьянов. — Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2017. — 160 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov A. N., Uspenskii V. A. On the Definition of an Algorithm. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Progress of Mathematical Sciences*, 1958, vol. 13, no. 4 (82), pp. 3–28. (In Russian).

2. Ershov Yu. L. Numberings of Sets of General Recursive Functions. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1967, vol. 8, no. 5, pp. 1015–1025. (In Russian).

3. Ershov Yu. L. *Teoriya numeracii* [Theory of Numberings]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 416 p.

4. Marchenkov S. S. On Computable Enumerations of Families of General Recursive Functions. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 1972, vol. 11, no. 5, pp. 588–607. (In Russian).

5. Goncharov S. S. Computable single-valued numerations. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 1980, vol. 19, no. 1, pp. 23–44. (In Russian).

6. Badaev S. A., Goncharov S. S. On Rogers Semilattices of Families of Arithmetic Sets. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 507–522. (In Russian).

7. Kummer M. *Numberings of $R_1 \cup F$*. In Börger E., Kleine H., Richter M. M. (eds). Computer Science Logic 1988. *Lecture Notes in Computer Science 385*. Berlin, Springer Verlag, 1989, pp. 166–186.

8. Kummer M. Some Applications of Computable one-one Numberings. *Archive for Mathematical Logic*, 1990, vol. 30, no. 4, pp. 219–230.

9. Goncharov S. S., Sorbi A. Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 1997, vol. 36, no. 6, pp. 621–641. (In Russian).

10. Podzorov S. Yu. Initial segments in Rogers semilattices of Σ_n^0-computable numberings. *Algebra i logika = Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 2, pp. 211–226. (In Russian).

11. Korol'kov Yu. D. *Algoritmicheskie svoistva vychislimykh numeratsii* [Algorithmic characteristics of computable numerations]. Irkutsk State University Publ., 2013. 106 p.

12. Rogers H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. New York, McGrow-Hill, 1967, 504 p. (Russ. ed.: Rogers H. *Teoriya rekursivnykh funktsii i effektivnaya vychislimost'*. Moscow, Mir Publ., 1972. 624 p.).

13. Friedberg R. M. Three Theorems on Recursive Enumeration. I. Decomposition. II. Maximal Set. III. Enumeration without Duplication. *Journal of Symbolic Logic*, 1958, vol. 23, pp. 309–316.

14. Pour-El M. B. Recursively Enumerable Classes and Their Applications to Sequences of Formal Theories. *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 1965, vol. 8, pp. 104–121.

15. Mal'cev A. I. *Algoritmy i rekursivnye funktsii* [Algorithms and Recursive Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 392 p.

16. Korol'kov Yu. D., Mart'yanov V. I. *Diskretnye modeli: predstavlenie konechnymi derev'yami i razreshimost' formal'nykh teorii* [Discrete Models: Presentation by finite trees and tractability of formal theories]. National Research Irkutsk State Technical University Publ., 2017. 160 p.

Информация об авторах

Иванов Федор Илларионович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра налогов и таможенного дела, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: IvanovFI@bgu.ru.

Корольков Юрий Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра налогов и таможенного дела, Байкальский государ-

Authors

Fedor I. Ivanov — DSc in Physics and Mathematics, Professor, Department of Taxes and Customs, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: IvanovFI@bgu.ru.

Yuri D. Korolkov — DSc in Physics and Mathematics, Professor, Department of Taxes and Customs, Baikal State University, 11 Lenin

ISSN 2500-2759

ственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: KorolkovUD@bgu.ru.

St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: KorolkovUD@bgu.ru.

Для цитирования

Иванов Ф. И. Полурешетки Роджерса классов бесконечных вычислимых множеств / Ф. И. Иванов, Ю. Д. Корольков // Известия Байкальского государственного университета. — 2017. — Т. 27, № 4. — С. 585–593. — DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(4).585-593.

For citation

Ivanov F. I., Korolkov Yu. D. Rogers Semilattices of Classes of Infinite Computable Sets. *Izvestiya Baykal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 585–593. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(4).585-593. (In Russian).

ISSN 2500-2759